



# LE TOLERANCEMENT INERTIEL DANS LE CAS DE PRODUITS ASSEMBLES

Maurice Pillet

## ► To cite this version:

Maurice Pillet. LE TOLERANCEMENT INERTIEL DANS LE CAS DE PRODUITS ASSEMBLES.  
IDMME 2012, 2012, 6 p. hal-00976963

**HAL Id: hal-00976963**

**<https://hal.science/hal-00976963>**

Submitted on 10 Apr 2014

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## LE TOLERANCEMENT INERTIEL DANS LE CAS DE PRODUITS ASSEMBLES

**Maurice Pillet**

LLP CESALP – Université de Savoie – BP 806 – 74016 Annecy Cedex, +33 0450092275,  
maurice.pillet@univ-savoie.fr

### Résumé :

*Le tolérancement des caractéristiques est un élément très important de l'obtention de la qualité et de la fiabilité des produits assemblés. Traditionnellement, une tolérance s'exprime sous la forme d'un bipoint [Min Max] qui peut être obtenu de différentes façons que nous rappellerons rapidement. Le tolérancement inertiel proposé dans ce document abandonne la notion de bipoint pour tolérer la caractéristique par une cible et une inertie maximale autour de cette cible. Cette nouvelle représentation permet d'aborder la conformité d'un produit ou d'un lot avec de très nombreux avantages. Nous détaillerons le principe de ce tolérancement inertiel et décrirons ses principaux avantages sur le tolérancement traditionnel. Nous aborderons également la réalisation de pièces unitaires ou de série, le mélange de lots, la répartition des inerties dans le cas d'une combinaison de plusieurs caractéristiques élémentaires.*

**Mots clés : Tolérances, Tolérancement statistique, pire des cas, objectif cible, ingénierie robuste, Tolérancement inertiel.**

### 1 Introduction

Le tolérancement des caractéristiques entrant dans un assemblage reste un difficile compromis entre deux situations bien décrites dans la littérature [1] : le tolérancement au pire des cas et statistique. Le tolérancement au pire des cas garantit l'assemblage dans toutes les situations à partir du moment où les caractéristiques élémentaires sont dans les tolérances. Le tolérancement statistique tient compte de la faible probabilité d'assemblage d'extrêmes entre eux et permet d'élargir de façon importante les tolérances et ainsi de diminuer les coûts. Ces deux situations extrêmes ont des inconvénients bien connus (Coût de production et risque de non-qualité) aussi, plusieurs propositions ont été faites comme compromis partant toutes de l'hypothèse qu'un tolérancement se traduit par un bipoint [Min; Max]. Une autre réponse consiste à ne pas travailler sur les tolérances, mais sur la définition de la conformité par le biais d'indicateurs de capabilité. Ainsi, les indicateurs tels que le Cpm[2] offre une réponse partielle à ce problème pour l'évaluation d'un lot, mais sont difficiles à utiliser pour l'évaluation de la conformité d'un seul produit. Nous proposons dans cette présentation une autre approche en abandonnant la représentation traditionnelle du tolérancement par le bipoint [Min. ; Max.] pour aller vers une autre représentation. La représentation inertielle que nous proposons offre de nombreux avantages et permet de régler les principaux problèmes de tolérancement et de décisions de conformité.

## 2 Les différentes approches du tolérancement dans le cas des assemblages

### 2.1 Le tolérancement – un compromis

Dans le cas général du tolérancement lors d'un assemblage, le problème consiste à déterminer les tolérances sur les caractéristiques élémentaires  $x_i$  pour obtenir une caractéristique réponse  $Y$  satisfaisant le besoin des clients. En règle générale, lorsqu'on travaille au voisinage de la cible, une approximation linéaire de premier ordre est largement suffisante pour étudier le comportement du système. On considère alors que l'on peut caractériser le comportement par l'équation 1.

$$Y = \alpha_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \quad (1)$$

$\alpha_i$  représente le coefficient d'influence de  $x_i$  dans  $Y$ .

Le problème du tolérancement consiste à tenter de concilier deux préoccupations antagonistes :

- Fixer des tolérances le plus large possible pour diminuer les coûts de production.
- Assurer un niveau de qualité optimal sur la caractéristique  $Y$ .

Rappelons les principales méthodes de tolérancement dans le cas d'une relation linéaire.

### 2.2 Tolérancement au pire des cas

Dans ce cas, on considère que dans tous les cas d'assemblage, la tolérance sur  $Y$  sera respectée. On détermine les tolérances à partir de l'équation (2) :

$$Y = F(x_1, x_2, x_3, \dots) \quad (2)$$

$Y$  étant la caractéristique résultante,  $x_i$  les caractéristiques élémentaires

On note  $t_{xi} \pm \Delta_{xi}$  la tolérance au pire des cas sur les  $x_i$

$$\max(y) = \max_{t_{xi} - \Delta_{xi} < x_i < t_{xi} + \Delta_{xi}} f(x_1, \dots, x_n) \quad \min(y) = \min_{t_{xi} - \Delta_{xi} < x_i < t_{xi} + \Delta_{xi}} f(x_1, \dots, x_n)$$

$$t_y = \frac{\max(y) + \min(y)}{2} \quad (3)$$

$$\Delta_y = \frac{\max(y) - \min(y)}{2} \quad (4)$$

Dans le cas d'une relation linéaire, on a les relations :

$$t_y = \sum \alpha_i t_{xi} \quad (5)$$

$$\Delta_y = \sum |\alpha_i| \Delta_{xi} \quad (6)$$

La répartition des tolérances peut se faire suivant plusieurs méthodes [1]

- Répartition uniforme des tolérances.
- A partir des normes ou de règles de conception.
- A partir d'une répartition des tolérances proportionnelle à la racine carrée de la cote nominale.
- En fonction de l'historique des capacités.

L'inconvénient bien connu du tolérancement au pire des cas et le coût des produits associé à cette méthode. En effet, il conduit à des tolérances extrêmement serrées souvent très difficiles à tenir pour la production. Cela conduit à augmenter de façon considérable les coûts

de production par une augmentation des contrôles, des rebuts et par le choix de moyens de production plus sophistiqués. Par contre, lorsque les tolérances sont tenues sur les  $x_i$ , on a la garantie du respect des spécifications au niveau  $Y$ .

### 2.3 Tolérancement statistique

Le tolérancement statistique a été développé pour tenir compte de l'aspect combinatoire des tolérances [3]. A partir de l'équation 1, dans le cas où les variables  $x_i$  sont indépendantes avec un écart type  $\sigma_i$  on a la relation (7)

$$\sigma_Y = \sqrt{\sum \alpha_i^2 \sigma_i^2} \quad (7)$$

En supposant les tolérances proportionnelles à l'écart type, on obtient [4] l'équation (8)

$$T_Y = \sqrt{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 T_i^2} \quad (8)$$

Dans ce type de tolérancement, une des hypothèses fondamentale est le centrage de toutes les caractéristiques élémentaires  $x_i$ . De nombreux auteurs ont montré les inconvénients de ce type de tolérancement. Notamment Graves et Bisgaard [5] [6] ont identifié 5 risques majeurs :

1. Le modèle fonctionnel n'est pas adéquat.
2. La capacité des processus est insuffisante.
3. Les productions ne sont pas centrées.
4. Il n'y a pas indépendance entre les caractéristiques (corrélation).
5. Les composants ne sont pas distribués normalement.

Plusieurs méthodes ont été proposées pour contrecarrer les inconvénients du tolérancement statistique. La plus connue consiste à utiliser le tolérancement statistique augmenté [7][8]. Par cette approche, les tolérances sont calculées par l'équation (9) :

$$T_Y = f \sqrt{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 T_i^2} \quad (9)$$

$f$  représentant le coefficient d'augmentation souvent choisi arbitrairement autour de 1.5. Dans le cas où les coefficients  $\alpha_i$  sont égaux, en faisant varier le coefficient  $f$ , on passe des deux extrêmes :  $f=1$  tolérancement statistique,  $f=\sqrt{n}$  tolérancement au pire des cas. Différentes situations peuvent conduire à utiliser différents coefficients d'augmentation comme l'a montré Graves [6] qui fournit une approche intéressante pour déterminer de façon optimum ce coefficient  $f$  en fonction des capacités connues ou attendues sur les caractéristique  $x_i$ . Bien que fournissant un compromis intéressant entre les extrêmes (au pire des cas et statistique), ce tolérancement ne permet pas de résoudre tous les cas de figure. Il est toujours possible de trouver un contre exemple invalidant la méthode retenue.

### 2.5 La décision de conformité sur les caractéristiques élémentaires

Dans le cas d'un tolérancement au pire des cas, la décision de conformité sur une caractéristique élémentaire est simple à prendre. Si la caractéristique est dans les tolérances, elle est conforme. Dans le cas d'un lot, la conformité est théoriquement acceptée lorsque 100% des caractéristiques sont dans les tolérances. La notion de conformité est plus complexe dans le cas d'un tolérancement statistique (ou d'un tolérancement par Monte Carlo). La détermination des tolérances est fondée sur une distribution, pas sur des cas particuliers. Dans ce cas, il se pose le problème de l'acceptation d'une pièce. Doit-on accepter une pièce en

limite de tolérance ? Plusieurs contributions ont proposé d'utiliser les indicateurs de capabilités tels que  $Cpk$  ou  $Cpm$  [1]. Mais cette réponse n'est pas parfaitement satisfaisante comme l'ont montré Bisgaard et Graves [5] qui analysent le résultat d'un tolérancement statistique dans le cas d'un empilage de rondelles. Ils montrent qu'un bon  $Cpk$  et même un bon  $Cpm$  sur chacune des rondelles peut conduire à une caractéristique  $Y$  avec une très mauvaise capacité. Cette approche intéressante sous de nombreux aspects ne résout pas le problème de la décision de conformité sur une pièce ou sur un lot.

### 3 Le tolérancement inertiel

#### 3.1 Définition du tolérancement inertiel

Le but du tolérancement consiste à déterminer un critère d'acceptation sur les caractéristiques élémentaires  $x_i$  garantissant l'acceptation sur la caractéristique résultante  $Y$  quelles que soient les quantités produites. En plaçant une tolérance, le concepteur prend un risque de non-qualité par rapport à la situation idéale représentée par la cible. La tolérance permet de limiter le coût de non-qualité générée par un écart par rapport à cette cible. En général, la non qualité n'est pas le résultat direct de la valeur  $Y$ , mais d'une combinaison de  $Y$  avec les conditions d'environnement (Température extérieure par exemple) et d'exploitation (plus ou moins intensive). Dans le cas d'une conception bien conduite, lorsque  $Y$  est placé sur la cible le fonctionnement sera robuste par rapport aux conditions d'environnement et d'exploitation. Lorsque  $Y$  s'éloigne de la cible, le fonctionnement sera de plus en plus sensible aux conditions, et pourra entraîner une insatisfaction chez le client. Taguchi [9] a démontré que la perte financière associée ( $L$ ) à un écart par rapport à la cible était proportionnelle (coefficient  $K$ ) au carré de l'écart.

$$L = K(Y_i - cible)^2 \quad (10)$$

Dans le cas d'un lot, la perte associée est

$$L = K(\sigma_Y^2 + (\bar{Y} - cible)^2) = K(\sigma_Y^2 + \delta_Y^2) \quad (11)$$

L'écart quadratique  $I_Y = (\sigma_Y^2 + \delta_Y^2)$  est comparable à une "inertie" des valeurs autour de la cible, c'est pourquoi nous appellerons ce terme  $I_Y$ . Si l'on veut par les tolérances réellement limiter le coût de non-qualité, il est donc nécessaire de ne pas utiliser un intervalle  $[min ; max]$  comme on le fait traditionnellement mais plutôt tolérer la perte que l'on est prêt à accepter. Nous proposons de remplacer le tolérancement classique  $Y \pm \Delta Y$  par une tolérance  $Y(I_Y)$ . Dans laquelle  $I_Y$  représente l'inertie maximale acceptée sur la variable  $Y$ . Cette nouvelle façon de déterminer les tolérances possède de très grandes propriétés comme nous le montrerons dans cet article.

#### 3.2 Tolérancement et conformité

La décision de conformité d'une pièce n'est pas une chose facile dans le cas d'un assemblage. En effet, on est en présence d'une pièce, mais ce qui fera la qualité du produit assemblé sera la combinaison de plusieurs caractéristiques. Si l'on prend le cas d'une caractéristique en limite de tolérance, la décision de conformité doit prendre en compte plusieurs éléments connus ou inconnus :

- La taille de la série : En effet dans le cas d'une production unitaire la probabilité d'assembler une pièce aux extrêmes est plus importante que dans le cas d'une production en grande série.

- La distribution des caractéristiques : La décision ne doit pas être la même si la pièce en limite de tolérance est isolée ou si 100% de la production est également en limite de tolérance.
- La répartition des autres éléments de l'assemblage. Mais ces éléments sont en général inconnus au moment de la prise de décision de conformité.

Le tolérancement inertiel permet de prendre en compte ces différents éléments. Contrairement aux méthodes traditionnelles de tolérancement, le but n'est plus d'obtenir un niveau de qualité mesuré par un pourcentage hors tolérance, mais de garantir une inertie faible de  $Y$  autour de la cible. On ne raisonne plus sur des proportions hors tolérances mais sur l'inertie, la normalité n'est donc plus un critère nécessaire.

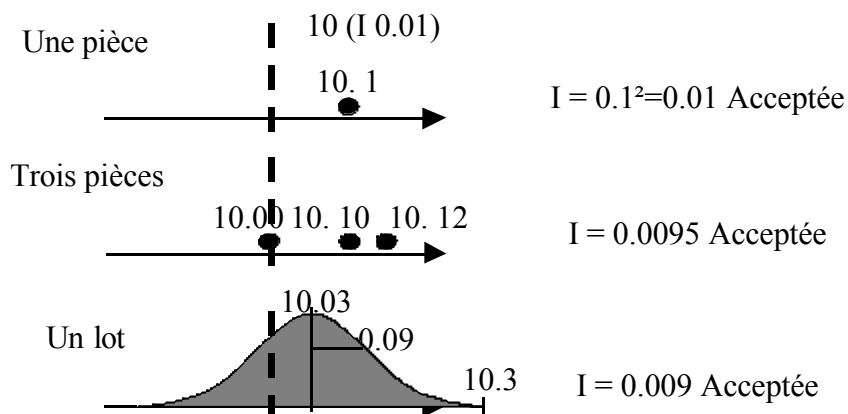


Fig. 1 : Conformité et tolérancement inertiel.

Le tolérancement inertiel conduit à des tolérances qui varient en fonction de la quantité de pièces produites. Pour illustrer ce point imaginons une caractéristique tolérancée  $10 I(0.01)$

1. Cas d'une seule pièce mesurée à 10.1. Dans ce cas l'inertie pour une pièce est égale à  $0.1^2 = 0.01$ . La pièce est en limite d'acceptation.

2. Prenons maintenant le cas de 3 pièces telles que l'on trouve : 10.00 ; 10.10 ; 10.14. L'inertie est alors  $I = 0.0099$ . Les pièces sont acceptées bien qu'une des trois pièces ait une inertie individuelle supérieure à 0.01.

3. Enfin prenons le cas d'un lot de pièces de moyenne 10.03 et d'écart type 0.09. Dans ce cas l'inertie  $I = 0.009$ ; Le lot est également accepté bien qu'il contienne 21.8 % produits dont la cote soit supérieure à 10.1 qui est la limite d'acceptation dans le cas d'une production unitaire.

Cette "tolérance floue" est un point particulièrement intéressant du tolérancement inertiel. Dans le cas d'une production unitaire, cela garantit la parfaite conformité de la production dans le pire des cas. Dans le cas de production en série, la tolérance inertielle tient compte des faibles probabilités d'assemblages des extrêmes. Ainsi, avec une seule tolérance on est capable de répondre aussi bien aux cas des productions unitaires que des productions de séries.

### 3.3 Les situations extrêmes d'acceptation dans le cas d'un tolérancement inertiel

Étudions les situations extrêmes d'acceptation dans le cas du tolérancement inertiel. L'inertie peut augmenter sous l'influence de deux paramètres : un décentrage  $\delta_y$  par rapport à la cible ou une augmentation de la dispersion ( $\sigma$ ) autour de la moyenne et ceci indépendamment de la forme de la répartition.

**Situation extrême centrée ( $\delta_Y = 0$ )**

$$I_Y = \sigma_Y^2 \quad (12)$$

$$\text{On obtient donc } \sigma_{YMax} = \sqrt{I_Y} \quad (13)$$

**Situation extrême avec un écart type nul ( $\sigma_Y = 0$ )**

$$I_Y = \delta_Y^2 \quad (14)$$

$$\text{On obtient donc } \delta_{YMax} = \sqrt{I_Y} \quad (15)$$

**Décentrage extrême accepté en fonction de l'écart type (fig. 3)**

Dans le cas du tolérancement inertiel, le décentrage extrême accepté sera fonction de l'écart type.

$$\delta_{YMax} = \sqrt{I_Y - \sigma_Y^2} = \sqrt{1 - \sigma_Y^2 / I_Y} \sqrt{I_Y} \quad \text{soit} \quad \delta / \sqrt{I_Y} = \sqrt{1 - (\sigma_Y / \sqrt{I_Y})^2} \quad (16)$$

Tant que  $\sigma < 0.6\sqrt{I}$  on peut avoir un décentrage relativement important  $\delta > 0.8\sqrt{I}$ . De même tant que le décentrage est faible, on peut se satisfaire d'une dispersion relativement importante.

**3.4 Définition d'un indicateur de capabilité  $C_{pi}$** 

Dans le cas d'un tolérancement inertiel, la conformité est déclarée si l'inertie de la caractéristique -ou du lot – est inférieure à l'inertie maximale souhaitée. Il est ainsi possible de définir un indicateur de capabilité  $C_{pi}$  par l'équation (17)

$$C_{pi} = \frac{I_{YMax}}{I_Y} \quad (17)$$

Pour être capable, un processus de fabrication doit permettre d'obtenir un  $C_{pi}$  supérieur à 1. Nous montrerons plus loin que cet indicateur de capabilité possède de nombreuses propriétés notamment dans le cas de mélange de lots : Le  $C_{pi}$  de deux lots mélangés est égal à la moyenne des  $C_{pi}$ .

**4 Propriété d'additivité des inerties****4.1 Cas d'un assemblage mécanique**

Les propriétés du tolérancement inertiel proviennent de la propriété d'additivité des inerties. Pour illustrer cette propriété, nous prendrons le cas d'une caractéristique résultante  $Y$  dépendant d'une fonction linéaire de plusieurs caractéristiques élémentaires  $x_i$  (Equation 1).

Dans ce cas, il est facile de montrer que l'on a :

$$\sigma_Y^2 = \sum \alpha_i^2 \sigma_i^2 \quad (18)$$

$$\delta_Y = \sum \alpha_i \delta_i \quad (19)$$

Calculons l'inertie obtenue sur la caractéristique  $Y$ .

$$I_Y = \sigma_Y^2 + \delta_Y^2 = \sum \alpha_i^2 \sigma_i^2 + \left( \sum \alpha_i \delta_i \right)^2$$

$$I_Y = \sum \alpha_i^2 \sigma_i^2 + \sum \alpha_i^2 \delta_i^2 + 2 \sum \alpha_i \alpha_j \delta_i \delta_j$$

qui s'écrit sous la forme :

$$I_Y = \sum \alpha_i^2 I_{Xi} + 2 \sum \alpha_i \alpha_j \delta_i \delta_j \quad (20)$$

La première partie de l'équation correspond à l'additivité des inerties. Le double produit correspond au cas où tous les décentrages s'effectuent du même côté. Dans le cas de

répartition aléatoire des moyennes lorsque le nombre de composants est important, on peut considérer que ce double produit est égal à zéro. On se retrouve alors dans une hypothèse proche de l'hypothèse du tolérancement statistique classique. Par contre dans les cas où l'on n'a pas un nombre de composants important ou si on ne peut pas considérer que la répartition des moyennes sera aléatoire, il est possible d'en tenir compte en intégrant le double produit dans la répartition des inerties. L'équation (20) permet de calculer la répartition des inerties sur chaque caractéristique élémentaire en fonction de l'inertie souhaitée sur la caractéristique résultante. Cette équation permet - si on le souhaite - d'intégrer le risque d'un décentrage systématique de tous les (ou plusieurs) éléments du même côté défavorable. Cette équation permet facilement de déterminer les tolérances sur les caractéristiques élémentaires selon quatre hypothèses :

#### **Hypothèse 1 : Pire des cas**

En tolérancement inertiel, nous avons montré que  $\delta_i$  était maximale lorsqu'il était égal à la racine carrée de l'inertie maximale. Au pire des cas ce terme est donc égal à :

$$I_{YMax} = \sum \alpha_i^2 I_{iMax} + 2 \sum \alpha_i \alpha_j \sqrt{I_{iMax}} \sqrt{I_{jMax}} \quad (21)$$

L'équation 21 se simplifie dans les cas simples où les  $\alpha_i = 1$  et en cas de répartition uniforme des inerties ( $I_{iMax} = I_{Max}$ )

$$I_{YMax} = n I_{Max} + n(n-1) I_{Max} = n^2 I_{Max} \quad \text{D'où} \quad I_{Max} = I_{YMax} / n^2 \quad (22)$$

#### **Hypothèse 2 : Répartition aléatoire des moyennes**

En cas de répartition aléatoire des moyennes, le terme  $2 \sum \alpha_i \alpha_j \delta_i \delta_j$  : est égal à 0. L'équation 21 se simplifie dans les cas simples où les  $\alpha_i = 1$  et en cas de répartition uniforme des inerties ( $I_{iMax} = I_{Max}$ ).

$$I_Y = n I_{Max} \quad I_{Max} = I_Y / n \quad (23)$$

#### **Hypothèse 3 : Décentrage tous défavorable de la moyenne de k sigma**

Dans le cas d'empilage de rondelles tels qu'évoqué par Bisgaard [5], il est possible que tous les éléments de l'empilage soient décentrés du même côté. Avec le tolérancement inertiel, il est possible de tenir compte de cette possibilité par le double produit.

Nous avons :  $I_Y = \sum \alpha_i^2 I_{Xi} + 2 \sum \alpha_i \alpha_j \delta_i \delta_j$

$$\text{Soit } I_Y = \sum \alpha_i^2 I_{iMax} + 2 \sum \alpha_i \alpha_j (1 - 1/(1 + k^2)) \sqrt{I_{iMax}} \sqrt{I_{jMax}} \quad (24)$$

L'équation 24 se simplifie dans les cas simples où les  $\alpha_i = 1$  et en cas de répartition uniforme des inerties ( $I_{iMax} = I_{Max}$ ).

$$I_{YMax} = n I_X + n(n-1) \left(1 - \frac{1}{1 + k^2}\right) I_X$$

$$I_X = \frac{I_{YMax}}{n \left(\frac{nk^2 + 1}{1 + k^2}\right)} \quad (25)$$

#### **Hypothèse 4 : Décentrage défavorable de m caractéristiques parmi les n**

Dans cette hypothèse le concepteur peut déterminer le nombre de caractéristiques qui pourront être décentrées de manière toutes défavorables. Cette dernière hypothèse permet de réaliser le meilleur compromis entre coût de production et qualité du produit assemblé. Dans ces conditions le poids du terme double produit est diminué. Dans le cas simple où les  $\alpha_i$  sont égaux à 1 et la répartition des inerties se fait de manière uniforme, on peut alors écrire



$$I_{YMax} = nI_X + m(m-1)\left(1 - \frac{1}{1+k^2}\right)I_X$$

$$\text{soit } I_X = \frac{I_{YMax}(1+k^2)}{n(1+k^2) + mk^2(m-1)} \quad (26)$$

### 4.3 Application sur un exemple simple

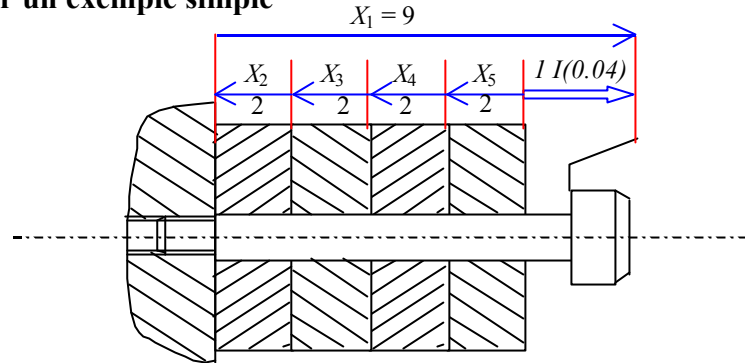


Fig. 2 - Exemple de tolérancement inertiel

Considérons pour illustrer la répartition des tolérances en tolérancement inertiel le cas de la figure 2. On a la relation  $Y = x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5$ . Dans cet exemple on a un risque de voir les pièces 2 à 5 toutes décentrées de  $k$  sigma dans le même sens. Le jeu est coté  $1 I(0,04)$  ce qui correspond dans le cas d'une population centrée à une distribution d'écart type  $\sigma = \sqrt{I} = \sqrt{0.04} = 0.2$ . Les cotes cibles sont fixées de la façon suivante :  $x_1 = 9$ ,  $x_{2-5} = 2$

Pour fixer les inerties maximales sur chaque  $x_i$  on utilise la relation (21) avec une répartition uniforme des inerties sur chacune des caractéristiques. Différentes situations peuvent être considérées.

**Répartition au pire des cas**  $0.05 = 5^2 I_X$  Soit  $I_X = 0.0016$

Ce qui correspond, dans le cas d'une population centrée, à une distribution d'écart type 0.04. Avec cette solution toute caractéristique ayant une inertie acceptée conduirait à une inertie acceptable sur le produit fini. Même dans le cas théorique d'une production d'écart type nul et donc de décentrage  $\delta$  maximal. On vérifie facilement que dans le cas d'une production unitaire, cela correspond à la situation au pire des cas du tolérancement traditionnel. L'augmentation des "tolérances" au sens traditionnel est alors automatique en cas de production par lot du fait même de la définition du tolérancement inertiel.

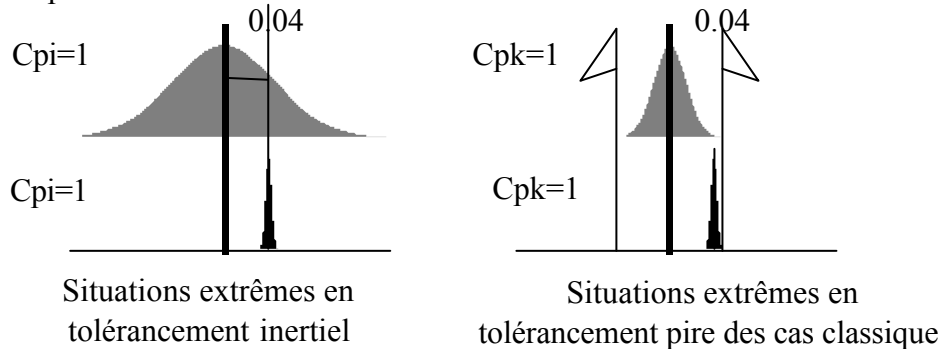


Fig. 3 – Risque en tolérancement inertiel et statistique classique

### Répartition aléatoire des moyennes $0.04 = 5 I_x$ Soit $I_x = 0.008$

Ce qui correspond, dans le cas d'une population centrée, à une distribution d'écart type 0.089. Avec cette situation, on suppose que les populations sont toutes centrées ou que la somme des décentrages est proche de zéro. Dans le cas des 4 rondelles de l'exemple, cette hypothèse est périlleuse. En fait, on se retrouve dans le cas d'une **production centrée** dans la même hypothèse que dans le cas classique du tolérancement statistique. Dans le cas d'une **production décentrée** le risque est beaucoup plus faible que dans le cas classique du tolérancement statistique (figure 3 avec un objectif de  $C_{pk} > 1$ )

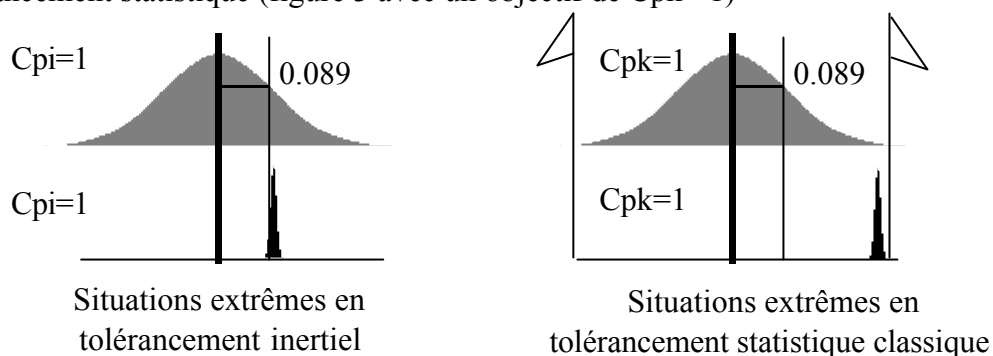


Fig. 4 – Risque en tolérancement inertiel et statistique classique

### Répartition avec un décentrage tous défavorable de 1 écart type $I_x = 0.0027$

Ce qui correspond dans le cas d'une population centrée à une distribution d'écart type 0.052. Dans ces conditions, on a tenu compte d'un décentrage tous défavorable de 1 écart type pour trouver le meilleur compromis possible entre coût de production et le tolérancement.

### Répartition avec un décentrage tous défavorable de 1 écart type pour m composants

On peut facilement établir un tableau des inerties en fonction du nombre de composants que l'on supposera être décentrer tous de façon défavorable.

m composants décentrés	0	1	2	3	4	5
Inertie maximale $I_x$	0.008	0.008	0.0067	0.005	0.036	0.027
Sigma dans le cas centré	0.0089	0.0089	0.0082	0.063	0.06	0.052

Les cas  $m=0$  et  $m=5$  correspondent aux deux cas précédents. En tolérancement inertiel, le cas  $m=1$  n'introduit pas de condition supplémentaire par rapport à  $m=0$ . Dans l'exemple choisi, le produit comporte 4 éléments identiques donc probablement réalisés dans les mêmes conditions, on retiendrait le cas  $m = 4$

### 4.3 Cas du mélange de lots

Un des inconvénients de l'indicateur classique de capabilité  $C_{pk}$  apparaît lorsqu'on mélange deux lots. En mélangeant deux lots de capabilité acceptable ( $C_{pk} > 1.33$ ) on peut obtenir un lot de qualité non acceptable ( $C_{pk} < 1.33$ ). Cet inconvénient ne se retrouve pas dans le cas d'un tolérancement inertiel avec l'indicateur  $C_{pi}$ . En effet, en mélangeant  $k$  lots de même taille  $n$  et de capabilité  $C_{pi_k}$ , on obtient un lot résultant tel que :

$$C_{pi} = (1/k) \sum C_{pi} \quad (27)$$

$$I = \frac{1}{kn} \sum X_i^2 = \frac{1}{kn} \sum_{j=1}^k (X_i - \bar{X}_j + \bar{X}_j)^2$$

$$I = \frac{1}{kn} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k \left[ (X_i - \bar{X}_j)^2 + \bar{X}_j^2 + 2\bar{X}_j(X_i - \bar{X}_j) \right]$$

$$I = \frac{1}{k} \sum \left( \sigma_k^2 + \bar{X}_j^2 \right) = \frac{1}{k} \sum I_j \quad (28)$$

On passe immédiatement de l'équation (28) à l'équation (27) en utilisant l'équation (17). Cette propriété est particulièrement intéressante dans le cas de procédés multigénérateurs tels que les presses à injecter. Si chaque empreinte du moule a un Cpi acceptable, alors lorsqu'on mélangera l'ensemble de la production, le Cpi global sera également acceptable. Ce qui n'est pas le cas avec les indicateurs de capabilité tel que le Cpk ou le Cpm.

## 6. Conclusion

Le tolérancement inertiel proposé dans cette communication offre de nombreux avantages par rapport au tolérancement traditionnel. Les principaux sont les suivants :

1. Le tolérancement inertiel tient compte de la combinatoire source de la non-qualité. C'est rarement une caractéristique qui est à l'origine de la non-qualité, mais souvent la combinaison défavorable de plusieurs caractéristiques.
2. Dans le cas de produits assemblés, on est capable de déterminer sans ambiguïté l'inertie sur chacune des caractéristiques élémentaires à partir de l'inertie souhaitée sur l'inertie résultante.
3. Les propriétés d'additivité de l'inertie permettent de définir un indicateur de capabilité additif. Cela permet de réaliser des mélanges de lots acceptables sans risque d'avoir en final une capabilité inacceptable.
4. Le tolérancement inertiel intègre directement la notion de taille de lot; Ainsi, les limites extrêmes d'acceptation sont différentes si on réalise une pièce ou un lot de pièces.
5. Le tolérancement inertiel et le Cpi permet de définir sans ambiguïté la notion de conformité d'une pièce ou d'un lot contrairement aux couples actuels tolérancement/indicateurs de capabilité.
6. Il est très facile de généraliser le tolérancement inertiel à tous les cas de figure unilatéraux [10]

## Bibliographie

- [1] K.W. CHASE; A. R. PRAKINSON- A survey of recherche in the application of tolerance analysis to the design of mechanical assemblies – Research in Engineering design (1991) 3 :23-37
- [2] L. J. CHAN, S. W. CHENG, F. A. SPIRING, "A new Measure of Process Capability : Cpm" - Journal of Quality Technology, Vol 20, N° 3, 1988, pp 162-175.
- [3] W. A. SCHEWART Economic Control of Quality of Manufactured Product. Van Nostrand, New York, 1931
- [4] E. LGRANT. Statistical Quality Control – Mc Graw Hill, New York 1946
- [5] S. GRAVES, S. BISGAARD. Five ways statistical tolerancing can fail and what do about them – CQPI Report n°159 September 1997
- [6] S. GRAVES. How to reduce costs using a tolerance analysis formula tailored to your organisation – CQPI Report n° 157 - 1997
- [7] J. GILSON. A new Approach to engineering tolerances. The Machinery publishing Co., London, UK (1951)
- [8] A. BENDER. Benderizing tolerances – Graphic Science, Dec 1962,17-21
- [9] G. TAGUCHI, System of experimental design, Engineering Methods to Optimize Quality and Minimize Costs, Volumes 1 et 2, American Supplier Institute, INC, 1987
- [10] M. PILLET, F. BERNARD, L. AVRILLON (2001) - Le tolérancement inertiel, une autre façon d'intégrer l'aspect combinatoire dans les processus assemblés – Congrès CPI 2001 – Fès Maroc